

Metode de numărare

Matematică - Combinatorică

www.enciclopul.ro

În primul rând, să discutăm câteva noțiuni de teorie care ne vor ajuta în rezolvarea problemelor și exercițiilor:

1. **Combinările** reprezintă submulțimi de k elemente ale unei mulțimi de n elemente. Astfel, în alegerea combinărilor nu se ține cont de ordinea elementelor și nu sunt permise repetările. Numărul combinărilor îl vom nota cu C_n^k . Atunci avem relațiile:

(a) $C_n^k = \frac{(n-k+1)(n-k+2)\dots n}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Obținem relația prin alegerea numerelor care alcătuiesc combinarea (cu Regula Produsului avem întâi n , apoi $n-1$ și așa mai departe până la valoarea $n-k+1$). Apoi împărțim la $k!$ (numărul permutărilor mulțimii de k elemente – nu contează ordinea).

(b) $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$, numită relația de recurență a combinărilor. Adăugând un element la mulțimea de $n-1$ elemente, formăm combinările de k elemente astfel:
→ cele deja existente în mulțimea de $n-1$ elemente, adică C_{n-1}^{k-1} ;
→ cele formate din $k-1$ elemente din mulțimea de $n-1$ elemente și noul element adăugat, adică C_{n-1}^k .

(c) $C_n^k = C_n^{n-k}$, care se vede imediat din relația (a).

(d) $C_n^k = \binom{n}{k}$, unde $\binom{n}{k}$ este coeficientul binomial, din formula Binomului lui Newton.

2. **Aranjamentele** reprezintă k -uple ordonate ale unei mulțimi de n elemente. Astfel, în alegerea aranjamentelor se ține cont de ordinea elementelor și nu sunt permise repetările. Numărul aranjamentelor îl vom nota A_n^k . Avem relațiile:

(a) $A_n^k = k!C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$. Cum în aranjamente contează ordinea, este de ajuns să considerăm fiecare combinație și să o transformăm în $k!$ aranjamente.

(b) $A_n^k = A_{n-1}^k + kA_{n-1}^{k-1}$, prima relație de recurență, care se obține în mod similar cu relația de recurență a combinațiilor.

(c) $A_n^k = (n - k + 1) A_n^{k-1}$, a doua relație de recurență.

3. **Permutările** reprezintă n -uple ordonate formate cu elementele unei mulțimi de n elemente. Este, evident, imposibilă repetarea, iar ordinea contează. Vom nota numărul permutărilor cu P_n . Avem relațiile:

(a) $P_n = n!$, conform Regulii Produsului.

(b) $P_n = A_n^n$, care rezultă, evident, din definiția celor două noțiuni.

(c) $P_n = nP_{n-1}$, relația de recurență – este posibil ca dintr-o mulțime de n elemente să separăm o mulțime de $n - 1$ elemente, iar la permutările acesteia să adăugăm ultimul element pe una din cele n poziții. Această relație și observație este baza demonstrației prin inducție simplă după n a valorii permutărilor.

Aceste noțiuni fiind definite și explicate, să ne uităm la următoarele exerciții și probleme:

Problema 1. Un pachet de cărți de poker are 52 cărți cu 13 valori ($A, 2, 3, \dots, 10, J, Q, K$) și patru simboluri ($\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit$). O mână de poker are 5 cărți din pachet. Calculați, fără a desface elementele combinatorice (combinații, aranjamente, permutări):

(a) Câte mâini de poker distincte există?

(b) Câte combinații cu exact o pereche există? De exemplu, avem combinația $A\clubsuit A\diamondsuit J\heartsuit J\spadesuit K\clubsuit$ este o combinație cu două perechi, iar combinația $A\clubsuit A\diamondsuit J\heartsuit Q\spadesuit K\clubsuit$ este o combinație cu o pereche.

(c) Câte combinații „full house” (o triplă și o pereche) există? De exemplu, combinația $A\clubsuit A\diamondsuit J\heartsuit J\spadesuit J\clubsuit$ este „full house”.

(d) Câte combinații „careu” (toate patru cărțile de un tip) există?
Combinatia $A\clubsuit A\diamondsuit A\heartsuit A\spadesuit K\clubsuit$ este „careu”.

(e) Câte combinații „brelan” (o triplă și două cărți distincte) există?
Combinatia $A\clubsuit A\diamondsuit A\heartsuit J\spadesuit K\clubsuit$ este „brelan”.

(f) Câte chinte (suite) există? O suită presupune 5 cărți cu valori consecutive. De exemplu $A\clubsuit 2\clubsuit 3\clubsuit 4\clubsuit 5\clubsuit$ este o chintă.

(g) Câte chinte de culoare există? Chinta de culoare este o chintă monocoloră. $A\clubsuit 2\clubsuit 3\clubsuit 4\clubsuit 5\clubsuit$ este o chintă de culoare.

Soluție.

(a) Avem evident C_{52}^5 mâini posibile.

(b) Combinațiile cu o pereche sau cu două perechi au formula generală $X^a X^b Y^c Z^d W^e$, unde bazele sunt valori de cărți, iar exponenții sunt simboluri. Bazele sunt distincte, dar exponenții se pot repeta dacă nu sunt deasupra aceleiași baze. Pentru a alege X avem 13 variante, pentru a alege $\{Y, Z, W\}$ avem C_{12}^3 variante, iar pentru simboluri avem C_4^2 modalități de a alege $\{a, b\}$ și 4^3 modalități de a alege celelalte simboluri (Regula Produsului). Răspuns final: $13 \cdot 4^3 \cdot C_4^2 \cdot C_{12}^3$.

(c) Combinațiile „full house” au formula generală $X^a X^b X^c Y^d Y^e$, cu notațiile de la punctul precedent. Pentru a alege (X, Y) , avem A_{13}^2 variante, pentru a alege $\{a, b, c\}$ avem C_4^3 modalități, pentru a alege $\{d, e\}$ avem C_4^2 moduri. Răspuns final: $A_{13}^2 C_4^3 C_4^2$.

(d) Combinațiile „careu” au formula generală $X^a X^b X^c X^d Y^e$, cu notațiile folosite până acum. Pentru a alege (X, Y) , avem A_{13}^2 variante, pentru a alege $\{a, b, c, d\}$, $C_4^4 = 1$ mod, pentru a alege e , 4 modalități. Răspuns final: $4A_{13}^2$.

(e) Combinațiile „brelan” au formula generală $X^a X^b X^c Y^d Z^e$, cu notațiile folosite până acum. Pentru a alege X avem 13 modalități, pentru a alege $\{Y, Z\}$ avem C_{12}^2 variante, pentru a alege $\{a, b, c\}$ avem C_4^3 moduri și avem 4^2 moduri de a alege celelalte simboluri (Regula Produsului). Răspunsul final este: $13 \cdot 4^2 \cdot C_{12}^2 C_4^3$.

(f) Chintele sunt definite în mod unic de cea mai mică carte aleasă din mulțimea $M \in \{A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (și $10JQKA$ este considerată chintă) și de succesiunea de culori (4^5 , conform Regulii Produsului). Așadar, avem $10 \cdot 4^5$

variante.

(g) Chintele de culoare au cea mai mică carte în aceeași mulțime, dar doar 4 modalități de a alege culoarea. Avem 40 de chinte de culoare.

Problema 2. În 10 eprubete se efectuează reacția dintre două substanțe A și B . Nu este important pentru experiment care dintre substanțele A și B este turnată prima sau în ce ordine se umplu eprubetele. Stabiliți în câte moduri se poate efectua experimentul (nu desfaceți elementele combinatorice).

Soluție:

Definim operațiile $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ adăugarea substanței A în eprubeta 1, 2, $\dots$, 10 și similar operațiile $B_1, B_2, \dots, B_{10}$. Problema devine stabilirea numărului de permutări a secvenței $A_1 A_2 \dots A_{10} B_1 B_2 \dots B_{10}$. Răspunsul este acum evident: P_{20} .

Problema 3. Cei $6n$ elevi ai unei clase sunt împărțiți în trei grupe (engleză, franceză și germană). Niciuna dintre grupe nu poate avea mai puțin n elevi. În câte moduri pot fi repartizați elevii în grupe – exprimați folosind elemente combinatorice? (nu contează ordinea elevilor, ci numărul lor)

Soluție (Vom folosi metoda „Stars and Bars”):

Plasăm implicit n elevi în fiecare grupă. Pe ceilalți îi împărțim conform schemei $* \dots * | * \dots * | * \dots *$, folosind $*$ pentru elev și $|$ ca separatoare în grupe. Înainte de primul separator avem engleză, între separatori avem franceză, după ultimul separator avem germană. Avem $3n$ elevi suplimentari și 2 separatori, adică $3n + 2$ caractere. Sunt, așadar, C_{3n+2}^2 variante de a plasa elevii (conform Stars and Bars).

Problema 4. Un roboțel se poate mișca doar pe direcțiile N și E , cu 1 unitate. În câte moduri poate ajunge roboțelul de la coordonatele $(0, 0)$ la coordonatele (m, n) .

Soluție:

Avem m pași la est și n pași la nord. Formând o succesiune de operații, avem (similar cu problema 2) P_{m+n} variante.